

MÉTODOS Y APLICACIONES DE CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS

TRABAJO DE FINAL DE GRADO- GRADO DE MATEMÁTICAS –
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA – Alumna: Marta Muedra / Tutora: Isabel Cordero

INICIO DEL CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS

BABILONIOS

- Hace 4.000 años
- Algoritmo
- Tablilla

EGIPCIOS

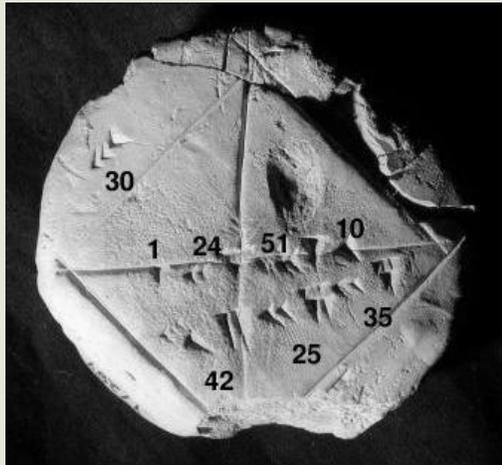
- Hace 3.500 años
- Papiro de Rhind

INDIOS

- Hace 2.500 años

ÁRABES

- Más tarde perfeccionaron método



MÉTODO BABILÓNICO

- Fórmula del método

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se realizan 3 operaciones en cada iteración. Únicamente son necesarias 6 operaciones para obtener 2 decimales correctos.

- Ejemplo: Cálculo de raíz de 2 siendo el valor inicial 1

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5$$

Una vez hecha la primera iteración, calculamos la segunda del mismo modo

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{1,5} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1,5 + 1,3333\dots) = 1,4166\dots$$

Entonces, después de dos iteraciones, obtenemos 3 cifras correctas de $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1,41\dots$$

APLICACIONES Y PROBLEMAS DE LA ÉPOCA

- Cultura babilónica: podían resolver ecuaciones cuadráticas, algunas ecuaciones cúbicas y bicuadradas. Un problema de la época consiste en *conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870*.
- Cultura egipcia: se encuentran ecuaciones de la forma $a \cdot x^2 = b$, en el que se utiliza la raíz cuadrada para resolverlo, aunque no se tiene constancia de si tenían procedimientos para calcularlas.
- Cultura hindú: en el libro *Aryabhatiya* formula un conjunto de instrucciones para calcular raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.
- Cultura griega: utilizaban los arreglos geométricos para encontrar raíces cuadradas, pero solo de números enteros y la utilizaban en el Teorema de Pitágoras.

MÉTODO ITERATIVO

- Un método iterativo trata de resolver un problema matemático, como una ecuación o un sistema de ecuaciones, mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Ejemplo: *Método de Newton*.

DIFERENCIA CON UN MÉTODO DIRECTO:

Un método directo trata de resolver el problema de una sola vez. Antes de iniciar el método es conocido el número de operaciones necesario para llegar a la solución exacta. Ejemplo: *Método de Gauss*.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

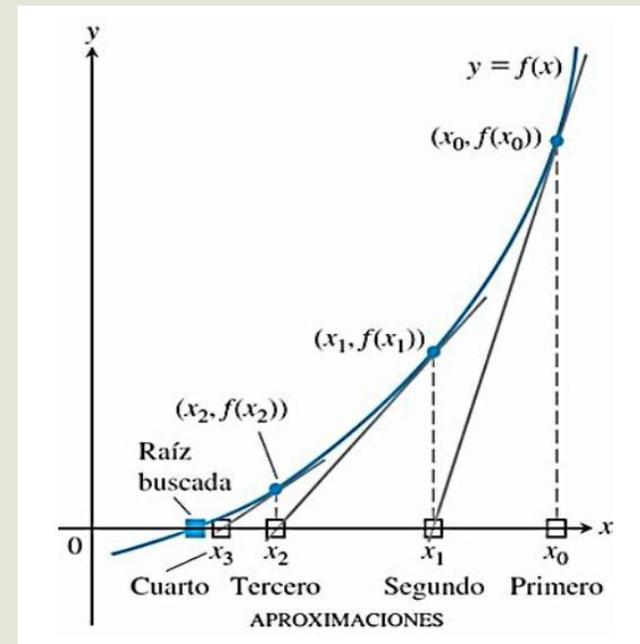
MÉTODO DE NEWTON

Fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La derivada $f'(x)$ es una función que mide como cambia otra función dada $f(x)$.

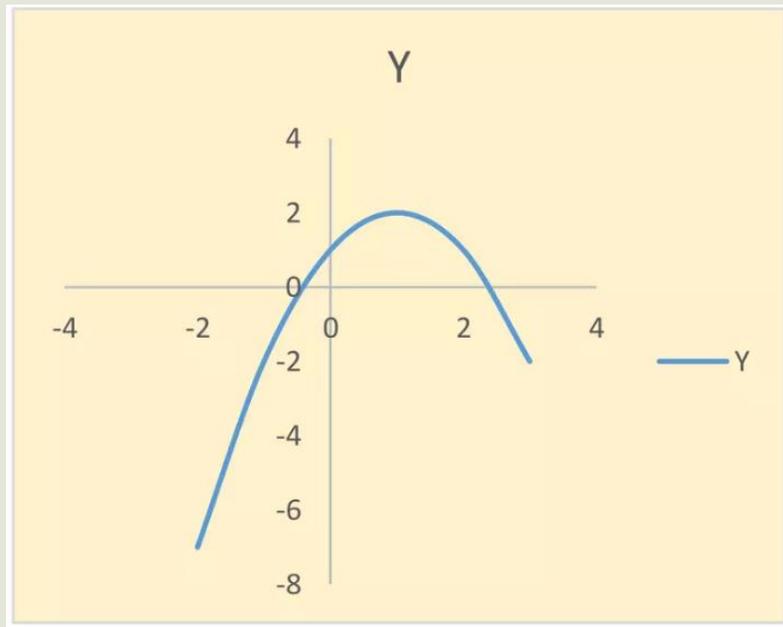
Interpretación geométrica



MÉTODO DE NEWTON: EJEMPLO

Usa el método de newton para estimar los dos ceros de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. Empieza con $x_0 = 0$ para la solución de la izquierda, y con $x_0 = 2$ para la solución de la derecha. Después halla x_2 para cada caso.

MÉTODO DE NEWTON: EJEMPLO



POR LA IZQUIERDA

$$x_1 = \frac{(0)^2 + 1}{2(0) - 2} = -0,5$$

$$x_2 = \frac{(-0,5)^2 + 1}{2(-0,5) - 2}$$

$$x_2 = -0,416$$

POR LA DERECHA

$$x_1 = \frac{(2)^2 + 1}{2(2) - 2} = 2,5$$

$$x_2 = \frac{(2,5)^2 + 1}{2(2,5) - 2}$$

$$x_2 = 2,416$$

ORDENADORES Y CALCULADORAS

- En la actualidad se tiene una gran ventaja frente a la antigüedad, ya que ahora contamos con calculadoras y ordenadores muy potentes que hacen que los algoritmos ya creados sean más eficientes. Los ordenadores solamente suman, restan, multiplican y dividen pero de una manera muy rápida y numerosas veces, de ahí que sean una gran herramienta. Podemos decir que el uso de algoritmos ha mejorado gracias a la aparición de máquinas que permiten reducir el tiempo necesario para la obtención de resultados.

MareNostrum, Centro Nacional de Supercomputación de Barcelona



PRIMERAS CALCULADORAS



Las Computadoras de Harvard en el trabajo. Henrietta Swan Levitt es la tercera por la izquierda.



El reloj calculador del alemán Wilhelm Schickard.

APLICACIONES Y PROBLEMAS ACTUALES

PROBLEMAS A REALIZAR EN GRUPO

APLICACIONES Y PROBLEMAS ACTUALES

PROBLEMA 1

Nadia tiene una caseta en la cual hay un huerto de forma circular con frutas y verduras. Para regar este huerto, tiene una manguera justo en el centro del círculo, el cual tiene un área de 40 m^2 . ¿Cuál es la longitud de la manguera necesaria para que Nadia pueda regar los 40 m^2 de huerto?

Ayuda: Área de un círculo: πr^2 .

Solución: Vamos a utilizar la fórmula del área del círculo y despejaremos el radio. Ya que la longitud de la manguera necesaria es el radio del huerto.

$$\pi r^2 = 40 \longrightarrow r = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3,568 \quad (3.1)$$

Por tanto, la manguera tiene que tener como mínimo 3,6 metros de longitud.

APLICACIONES Y PROBLEMAS ACTUALES

PROBLEMA 2

Andrey es mecánico y tiene un taller de coches en el cual se realizan ITVs. Su taller tiene forma cuadrada con 400 m^2 . Quiere calcular cuantos coches le caben en fila dentro del taller para tenerlos preparados para el día siguiente. Cuantos más coches pueda tener preparados más rápido irá, más ITVs podrá pasar y más dinero ganará, pero no quiere poner coches de más ya que quedaría mal con el cliente del coche que no quepa en el taller. Si la longitud média de un coche es de 4 m. ¿Cuántos coches podrá tener preparados para el día siguiente?

Solución: Dado que la fórmula de un cuadrado es $\text{Área} = \text{lado} \times \text{lado}$ y definiendo $\text{lado} = x$ tenemos:

$$A = x^2 \longrightarrow x = \sqrt{A} \longrightarrow x = \sqrt{400} = 20 \quad (3.3)$$

Ahora si hacemos $20 : 4 = 5$. Por lo que podemos concluir que como mucho va a poder tener 5 coches el fila preparados para el día siguiente.

APLICACIONES Y PROBLEMAS ACTUALES

PROBLEMA 3

Rafa está limpiando su habitación y quiere esparcir un ambientador con olor a menta por toda la estancia. Si su habitación tiene forma cuadrada y sabe que necesita ambientador para 80 m^3 . ¿Cuáles serán las dimensiones de la habitación?

Solución: El volumen de la estancia sabemos que es de 80 m^3 y dado que tiene forma cuadrada, todos sus lados miden lo mismo, si definimos *lado* = x tenemos:

$$\text{Volumen} = x^3 \longrightarrow 80 = x^3 \longrightarrow x = \sqrt[3]{80} = 4,31 \quad (3.4)$$

Concluimos que las dimensiones de la habitación son 4.31 m de lado.

PARA SABER MÁS...

- *Inicio del cálculo de raíces cuadradas:*
<https://www.madrimasd.org/blogs/maticas/2019/09/29/146990>
- *Aplicaciones / Problemas de la época:* <http://funes.uniandes.edu.co/5372/1/LorenzoSobreALME2007.pdf>
- *Método iterativo:* https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_iterativo
- *Método de Newton:* <https://es.slideshare.net/EliaquimOncihuaySala/newton-raphsonejercicios-resueltos>
- *Ordenadores y calculadoras:* <https://es.wikipedia.org/wiki/MareNostrum>
- *Primeras calculadoras:*

<https://www.labrujulaverde.com/2016/07/como-los-cientificos-realizaban-calculos-complejos-antes-de-la-invencion-de-las-calculadoras-y-los-ordenadores>

<https://www.europapress.es/economia/noticia-cual-origen-evolucion-calculadora-20150217173510.html>